UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ECONOMIA I

ANO LECTIVO 2018/2019

ANÁLISE QUANTITATIVA DISCRETA E ANÁLISE QUANTITATIVA CONTÍNUA NOS MANUAIS DE MICROECONOMIA

JOSÉ MANUEL ZORRO MENDES

INTRODUÇÃO

O propósito deste documento é complementar o manual de base empregue na disciplina de Economia I/ Economia 1-G e dar apoio à realização de um conjunto de exercícios a serem realizados durante o semestre, nas aulas práticas e nas provas de avaliação.

O manual empregue, *Microeconomics*, dos autores Paul Krugman e Robin Wells (2018), 5ª edição, tem um carácter introdutório, propondo um estudo da Microeconomia estritamente baseado na análise geométrica, através de gráficos, e na “análise quantitativa discreta". Um estudo mais rigoroso da Microeconomia implica, porém, que se realize uma “análise quantitativa contínua", ou seja, utilizando as expressões analíticas (supostamente conhecidas) que representam as relações funcionais entre as variáveis.

A secção imediata deste documento destina-se precisamente a identificar as diferenças entre a análise “geométrica” ou "gráfica", a “análise quantitativa discreta" e a “análise quantitativa contínua". Nas secções subsequentes introduzem-se os rudimentos da “análise quantitativa contínua” da fronteira de possibilidades da produção, do comportamento do consumidor, do comportamento do produtor e do equilíbrio de mercado.

Note-se que as disciplinas de Microeconomia I e Microeconomia II (das Licenciaturas em Economia, MAEG e Finanças) são, fundamentalmente, baseadas na “análise quantitativa contínua”.

Chama-se a atenção que nem todos os tópicos constantes deste caderno são leccionados na presente UC. Alguns aspectos de desenvolvimento contínuo (designadamente na teoria do consumidor, na parte que se refere à teoria da indiferença) serão apenas retomados em disciplinas de microeconomia de anos seguintes da licenciatura (designadamente, nos cursos de Economia, MAEG e Finanças).

1 – ANÁLISE QUANTITATIVA DISCRETA E ANÁLISE QUANTITATIVA CONTÍNUA

Análise quantitativa discreta, análise quantitativa contínua e análise gráfica

A generalidade dos manuais que ensinam as matérias de Microeconomia, ao nível do 1º ciclo do ensino superior, opta por uma das seguintes duas formas de análise quantitativa dos fenómenos microeconómicos: análise quantitativa discreta ou análise quantitativa contínua[1].

Tendo em atenção a abordagem dos manuais de Microeconomia, e para os propósitos deste texto, entende-se que se tem uma **análise quantitativa discreta**, quando, estando duas variáveis relacionadas entre si (ou seja, uma variável é função da outra), essa relação (ou função[2]):

- tem um domínio discreto;
- ou então, tendo um domínio não discreto, é conhecida apenas num subconjunto discreto (isto é, "em alguns pontos") desse domínio e nada é dito sobre o que se passa no restante domínio da função.

Também tendo em atenção a abordagem dos manuais de Microeconomia, e para os propósitos deste texto, entende-se que se tem uma **análise quantitativa contínua**, quando, estando duas variáveis relacionadas entre si (ou seja, uma variável é função da

[1] Existem manuais que abordam ambas as formas de análise quantitativa.

[2] Nem todas as relações entre variáveis são funções, mas, para efeitos deste texto, admite-se que sim, pois é isso o que se passa com a generalidade das relações entre variáveis económicas. Assim, no presente texto, "relação" é sinónimo de "função".

outra), o domínio dessa função é não discreto e conhece-se a expressão analítica que representa essa função em todo o seu domínio[3].

Pode sempre efectuar-se uma **representação gráfica** da relação entre duas variáveis, quer na análise quantitativa discreta (representando os pontos conhecidos dessa relação e unindo-os linearmente), quer na análise quantitativa contínua (desenhando o gráfico da expressão analítica que representa essa relação).

Assim, na análise quantitativa discreta, admita-se que as variáveis x e y se encontram relacionadas e que se conhecem apenas três pontos dessa relação: quando x assume o valor x_1, y assume o valor y_1; quando x assume o valor x_2, y assume o valor y_2; quando x assume o valor x_3, y assume o valor y_3. Nos manuais de Microeconomia, é usual representar esta relação de duas formas:

– Através de uma **tabela**, com os pontos conhecidos da relação.

Variável x	Variável y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3

– Através de um **gráfico**, que une linearmente (através de segmentos de reta) os pontos conhecidos da relação.

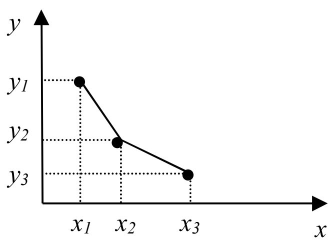

Figura 1

[3] Note-se que, para os propósitos deste texto, as expressões "análise quantitativa discreta" e "análise quantitativa contínua" não têm a ver apenas com as variáveis serem de domínio discreto ou contínuo, nem com a continuidade da expressão analítica que representa a função.

Por sua vez, na análise quantitativa contínua, admita-se que as variáveis x e y se encontram relacionadas e que se conhece a expressão analítica, *f*, que representa essa função, ou seja, $y = f(x)$. Nos manuais de Microeconomia, é usual representar esta relação de duas formas:

– Através da **expressão analítica** que representa a função, isto é, escrevendo $y = f(x)$.

– Através do **gráfico** da expressão analítica que representa a função,

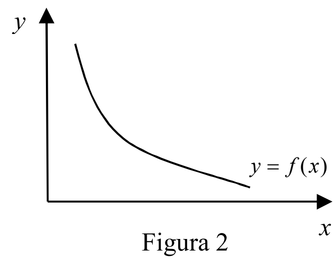

Figura 2

Variações na análise quantitativa discreta e na análise quantitativa contínua

Na análise quantitativa discreta, as variações das variáveis consideradas reportam-se às variações efetivamente verificadas entre os pontos conhecidos dessas variáveis. Regressando à Figura 1, a variação de x, de x_1 para x_2, é representada por $\Delta x = x_2 - x_1$. Quando x tem esta variação, y varia de y_1 para y_2, o que é representado por $\Delta y = y_2 - y_1$. Então, fazendo a divisão destas duas variações, para saber, por cada unidade que varia x, quantas unidades é que varia y, tem-se:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Na análise quantitativa contínua, é conhecida a expressão analítica que representa a relação entre as variáveis, para todo o domínio dessa relação. Este facto abre a possibilidade de as variações das variáveis serem infinitesimais, ou seja, de se confinarem a uma "vizinhança pequena" do ponto de partida (uma vez que a relação entre as variáveis é conhecida, não apenas no ponto de partida, mas também em todos os pontos de uma vizinhança do ponto de partida). Assim, em vez da expressão anterior, ter-se-á:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Repare-se que esta expressão mais não é do que a **derivada** de *y* em ordem a *x*, $\frac{dy}{dx}$, que dá quantas unidades é que varia *y*, se *x* tiver uma variação infinitesimal[4].

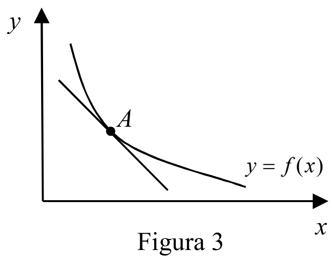

Figura 3

No caso da Figura 3, $\frac{dy}{dx} < 0$, porque a função *f* é **decrescente** (também se diz que "tem inclinação negativa ou declive negativo"), significando isto que as variáveis *x* e *y* se relacionam de forma inversa (quando *x* aumenta, *y* diminui). É claro que, se a relação entre as duas variáveis fosse directa (quando *x* aumenta, *y* também aumenta), a função seria **crescente** (com "inclinação positiva ou declive positivo") e teríamos $\frac{dy}{dx} > 0$, como se pode ver na Figura 4:

[4] Por vezes, nos manuais de Microeconomia, sabendo-se que $\frac{dy}{dx} = k$, diz-se que, se *x* variar "uma unidade", *y* varia *k* unidades. Esta afirmação está, em geral, incorreta, sendo que a correta é: se *x* tiver uma variação infinitesimal, *y* varia *k* unidades. A derivada de uma função num ponto é sempre uma aproximação linear a essa função, aproximação essa que só tem sentido numa "vizinhança pequena" do ponto, onde a diferença entre a função e a sua aproximação linear dada pela derivada é pequena. Se o afastamento do ponto em causa for significativo, a diferença entre a função e a sua aproximação linear dada pela derivada no ponto pode tornar-se muito grande, não fazendo sentido a utilização desta (a exceção é quando a função é linear, caso em que a aproximação dada pela derivada é exata). Assim, quando, na presença da derivada $\frac{dy}{dx} = k$, se afirma, num manual de Microeconomia, que, se o *x* variar "uma unidade", o *y* varia k unidades, deve subentender-se que a "uma unidade" que o *x* varia é uma "unidade pequena", ou seja, é uma variação infinitesimal.

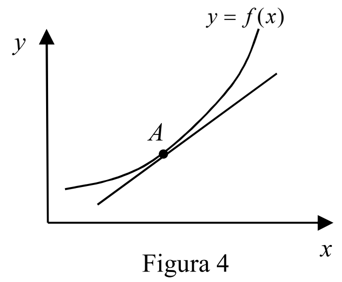

Figura 4

Ainda na análise quantitativa contínua, pode-se relacionar a velocidade das variações com o conceito de derivada. Na Figura 5 tem-se uma função **convexa**, sendo que a sua inclinação aumenta, do ponto *A* para o ponto *B* (o que significa que, por cada unidade que *x* aumenta, *y* aumenta mais, a partir do ponto *B* do que a partir do ponto *A*, ou seja, $\frac{dy}{dx}$ é maior no ponto *B* do que no ponto *A*, o que leva a segunda derivada da função a ser positiva, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, refletindo a aceleração do aumento):

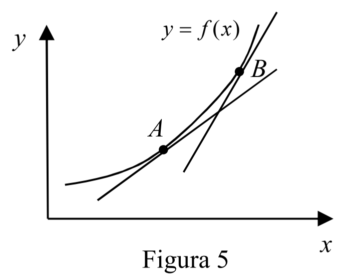

Figura 5

Na Figura 6 tem-se uma função **côncava**, sendo que a sua inclinação diminui, do ponto *A* para o ponto *B* (o que significa que, por cada unidade que *x* aumenta, *y* aumenta menos, a partir do ponto *B* do que a partir do ponto *A*, ou seja, $\frac{dy}{dx}$ é menor no ponto *B* do que no ponto *A*, o que leva a segunda derivada da função a ser negativa, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, refletindo a diminuição do aumento):

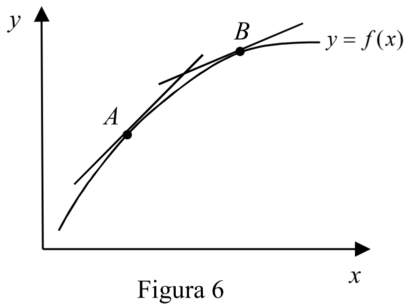

Figura 6

Máximos e mínimos na análise quantitativa discreta e na análise quantitativa contínua

Na análise quantitativa discreta, os **máximos** e os **mínimos** de uma variável deduzem-se por observação direta dos valores conhecidos dessa variável, o que permite identificar o maior e o menor valor da variável.

Na análise quantitativa contínua, os máximos e os mínimos de uma variável que é função de outra podem obter-se a partir da resolução da equação $\frac{dy}{dx} = 0$. Como se vê, pelas Figuras 7 e 8, a derivada da função é nula, quer no ponto em que atinge um máximo, quer no ponto em que atinge um mínimo[5]:

[5] Para saber se se está na presença de um máximo ou de um mínimo, ter-se-ia de entrar em consideração com as condições de segunda ordem (que envolvem a segunda derivada da função). Para os efeitos deste texto, e adotando a prática habitual nos manuais de Microeconomia, subentende-se que o conhecimento prévio da função permite concluir se as condições de primeira ordem $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$ conduzem a um máximo ou a um mínimo.

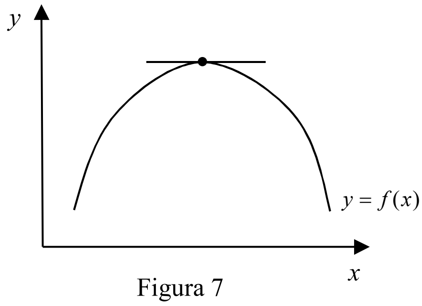

Figura 7

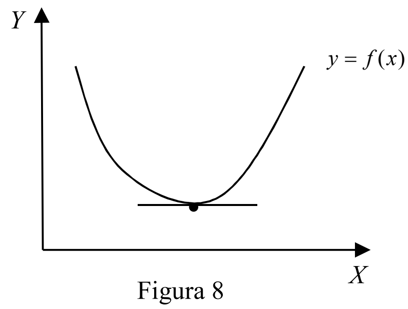

Figura 8

2 – FRONTEIRA DE POSSIBILIDADES DE PRODUÇÃO (FPP)

A fronteira de possibilidades de produção

Admita-se que uma economia dispõe de dadas quantidades de recursos, a partir das quais consegue produzir, em alternativa, diversas combinações máximas de dois bens, *X* e *Y*, cujas quantidades se designam por *x* e *y*, respectivamente. A curva que representa essas combinações máximas de produção dos dois bens é a chamada **fronteira de possibilidades de produção (FPP)**, a qual se representa na Figura 9 abaixo:

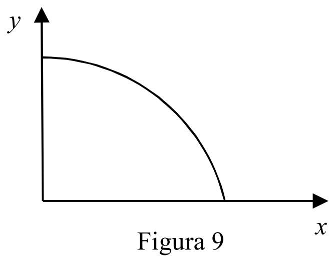

Figura 9

Repare-se que, na análise quantitativa contínua, a fronteira de possibilidades de produção é uma função que relaciona as quantidades dos bens *Y* e *X*, ou seja, $y = f(x)$, sendo a expressão analítica *f* conhecida. A fronteira de possibilidades de produção é uma função decrescente, o que reflecte o **custo de oportunidade** dos bens *X* e *Y*, um em termos do outro[6] (partindo de um ponto da fronteira de possibilidades de produção, só se consegue produzir mais uma dada quantidade de um dos bens, se se abdicar de produzir uma dada quantidade do outro bem). Este facto de a função fronteira de possibilidades de produção ser decrescente, reflecte-se, analiticamente, na derivada da função, a qual é negativa:

[6] O custo de oportunidade de produção do bem *X* em termos do bem *Y* diz quanto é que a economia tem de abdicar da produção do bem *Y* para produzir mais uma unidade do bem *X*.

$$\frac{dy}{dx} < 0 .$$

Mais ainda, o simétrico desta derivada é precisamente o custo de oportunidade do bem *X* em termos do bem *Y*, pois o seu valor indica quanto tem de diminuir a produção do bem *Y*, se se quiser aumentar a produção do bem *X* em uma unidade[7], mantendo a plena utilização dos recursos:

$$CO_{X,Y} = -\frac{dy}{dx} .$$

A fronteira de possibilidades de produção é côncava, pois o custo de oportunidade do bem *X* em termos do bem *Y* é crescente, à medida que se aumenta a produção do bem *X*. Este facto de a função fronteira de possibilidades de produção ser côncava tem um reflexo analítico na segunda derivada da função, a qual é negativa:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} < 0 .$$

Um caso particular da fronteira de possibilidades de produção é quando a mesma é uma **reta**:

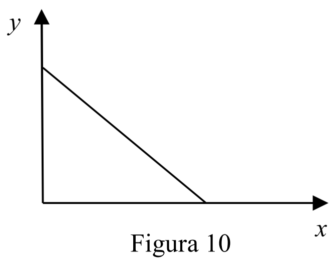

Figura 10

Neste caso, a função $y = f(x)$ mais não é do que a equação de uma reta:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = a - b \times x, a > 0, b > 0 ,$$

onde o sinal negativo antes da constante positiva *b* assegura que se trata da equação de uma reta decrescente:

[7] Considerando uma "unidade pequena", uma vez que se trata do conceito de derivada, deduzido com base em variações infinitesimais, tal como se referiu na nota de pé-de-página nº 4.

$$\frac{dy}{dx} = -b < 0 \, .$$

3 – COMPORTAMENTO DO CONSUMIDOR

A curva da procura

A **quantidade procurada** de um bem, q, depende de um conjunto de variáveis: o preço do próprio bem, os preços de alguns outros bens, o rendimento do consumidor, os gostos do consumidor, as expectativas do consumidor em relação ao futuro, etc. Se se designar essas variáveis por x_i, i = 1, 2, …, n, a **função de procura do bem**, g_D, pode representar-se como sendo:

$$q = g_D(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Usualmente, a variável que mais explica a procura de um bem é o próprio preço do bem, pelo que faz sentido, na função de procura do bem, isolar a variável preço, admitindo que todas as outras variáveis permanecem constantes. Supondo que a variável preço é x_1, ou seja, $x_1 = p$, e que $x_i = \bar{x}_i$, i = 2, 3, …, n, significa que a variável x_i permanece constante no valor $\bar{x}_i$, então tem-se:

$$q = f_D(p, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = f_D(p),$$

onde f_D é a **curva de procura do bem** e, na última passagem, se omitiram as variáveis $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$, porque se trata de constantes. Repare-se que a curva da procura do bem é uma relação apenas entre duas variáveis: a quantidade procurada do bem, q, e o preço do próprio bem, p (uma vez que se admite que todas as restantes variáveis que influenciam a procura do bem permanecem constantes).

Na análise quantitativa contínua a expressão analítica f_D é conhecida e o seu gráfico pode representar-se como:

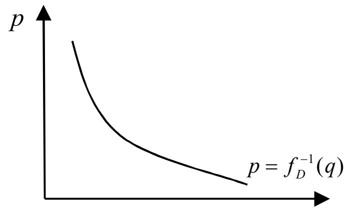

Figura 11

Na análise quantitativa discreta só se conhecem alguns pontos da curva da procura, fazendo-se a sua representação gráfica pela união desses pontos:

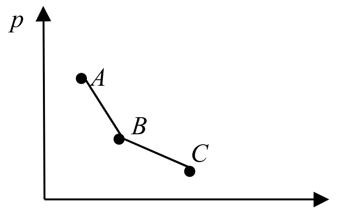

Figura 12

Repare-se que, por convenção na representação gráfica, a variável preço se representa no eixo das ordenadas e a variável quantidade se representa no eixo das abcissas[8], pelo que, em rigor, o que se representa graficamente, não é a curva da procura, $q = f_D(q)$, isto é, *q* como função de *p*, mas sim a curva da procura inversa, $p = f_D^{-1}(q)$, ou seja, *p* como função de *q*.

Da expressão da curva da procura de um bem, $q = f_D(p, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = f_D(p)$, vê-se claramente que uma variação de *p* implica uma variação de *q*, ao longo da curva da procura f_D. Na Figura 13 abaixo, isso está representado pelo aumento do preço, de p_1 para p_2, o que leva a quantidade procurada a diminuir, de q_1 para q_2, ou seja, a passar do ponto *A* para o ponto *B* da mesma curva da procura, a qual permanece inalterável:

[8] Esta convenção resulta de este tipo de representação gráfica ter sido adotado logo nos primeiros livros de economia, ainda no século XIX, tendo permanecido posteriormente.

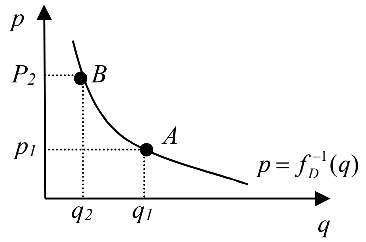

Figura 13

Já uma alteração no valor de uma das restantes variáveis explicativas da quantidade procurada do bem, $x_2 = \bar{x}_2, ..., x_n = \bar{x}_n$, também conduz a uma variação de q, mas através da alteração da própria curva da procura. Se, por exemplo, x_2 passar de $\bar{x}_2$ para $\bar{x}_2^{'}$, então a curva da procura, f_D, desloca-se, pois alterou-se um dos seus parâmetros. Na Figura 14 abaixo, tem-se a representação dessa deslocação da curva da procura:

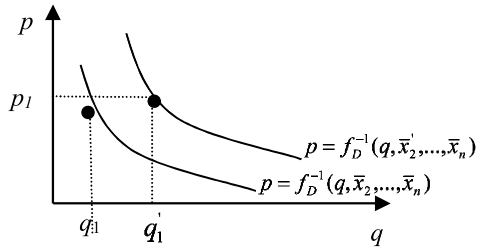

Figura 14

Repare-se que, para o mesmo nível de preços, $p = p_1$, têm-se dois níveis de procura, q_1 e $q_1^{'}$, consoante a variável explicativa x_2 assuma o valor $\bar{x}_2$ ou $\bar{x}_2^{'}$, respetivamente.

Como se sabe, existe uma relação inversa entre a quantidade procurada do bem e o preço do bem (se aumenta o preço, diminui a quantidade procurada), o que, geometricamente, dá origem a uma curva da procura decrescente. Quer isto dizer que a derivada de q em ordem a *p*, que dá o declive ou inclinação da curva da procura num dado ponto, é negativa:

$$\frac{dq}{dp} = f_D^{'}(p) < 0 .$$

A expressão analítica f_D, que representa a curva da procura de um bem, pode assumir diversos tipos, mas, em muitos casos, é habitual assumir que se trata de uma **forma funcional linear**. Assim sendo, a curva da procura do bem fica:

$$q = f_D(p) \Leftrightarrow q = a - b \times p, a \geq 0, b > 0 ,$$

onde o sinal negativo antes da constante positiva *b* se justifica pela relação inversa entre a quantidade procurada e o preço do próprio bem. Repare-se que esta expressão linear da curva da procura mais não é do que a **equação de uma reta** decrescente:

$$\frac{dq}{dp} = -b < 0 .$$

As elasticidades da procura

As **elasticidades da procura** medem a razão entre a variação percentual de uma dada variável explicativa da procura de um bem e a variação percentual da quantidade procurada desse bem. Assim, partindo da função de procura do bem,

$$q = g_D(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n) ,$$

a elasticidade da quantidade procurada do bem, *q*, em relação à variável x_j, é dada por:

$$\varepsilon_{q,x_j} = \frac{\text{variação percentual da quantidade procurada}}{\text{variação percentual da variável } x_j} = \frac{\frac{\Delta q}{q} \times 100}{\frac{\Delta x_j}{x_j} \times 100} = \frac{\Delta q}{\Delta x_j} \times \frac{x_j}{q} ,$$

onde os "Δ" representam as variações das respectivas variáveis.

Na análise quantitativa discreta levanta-se uma questão quanto a estas variações percentuais: como, ao variar, a variável x_j "salta" entre os pontos *A* e *B*, o valor da elasticidade depende de se considerar qual é ponto de partida, se o *A*, se o *B*, o que leva à conhecida fórmula do ponto médio. Na análise quantitativa contínua esse problema desaparece, porque se admite que a variação da variável x_j é uma variação muito pequena, ou seja, infinitesimal, o que leva a ficar numa vizinhança do ponto de partida. Assim, a elasticidade da quantidade procurada do bem, *q*, em relação à variável x_j, na análise quantitativa contínua (designada por "elasticidade no ponto"), é dada por:

$$\varepsilon_{q,x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_j} \times \frac{x_j}{q} = \frac{\partial q}{\partial x_j} \times \frac{x_j}{q}.$$

Repare-se que o $\lim\limits_{\Delta x_j \to 0}$ representa a variação infinitesimal da variável x_j e que $\lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_j}$ mais não é do que a definição da derivada parcial de *q* em ordem a x_j (recorde-se que a derivada parcial de *q* em ordem a x_j dá a variação de *q* motivada por uma variação infinitesimal de x_j, pressupondo que todas as restantes variáveis explicativas de *q* permanecem constantes).

A interpretação desta elasticidade é a habitual: por cada 1% que varia a variável x_j (desde o seu ponto de partida), quantos por cento é que varia a variável *q* (quantidade procurada do bem)[9]. É claro que, se a variável x_j for:

– o preço do próprio bem, tem-se a elasticidade da procura em relação ao preço ou elasticidade da procura preço direta;

– o preço de outro bem, tem-se a elasticidade da procura do nosso bem em relação ao preço do outro bem ou elasticidade da procura preço cruzada;

– o rendimento do consumidor, tem-se a elasticidade da procura em relação ao rendimento ou elasticidade da procura rendimento.

[9] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, subentende-se que a variação de 1% da variável x_j é uma "variação pequena", uma vez que esta elasticidade no ponto se baseia no conceito de derivada, deduzido com base em variações infinitesimais.

A restrição orçamental

Admita-se que o consumidor poderá efectuar a sua escolha de entre dois bens, *X* e *Y*, cujas quantidades se designam por *x* e *y*, respectivamente. Os preços desses bens são p_X, para o bem *X*, e p_Y, para o bem *Y*. O consumidor dispõe de um rendimento ou orçamento de *M* unidades monetárias, para gastar com os dois bens. Nestas circunstâncias, há uma restrição óbvia: o consumidor não pode gastar mais do que *M* com os dois bens. Esta restrição é a chamada **restrição orçamental** e pode representar-se como:

$$p_X \times x + p_Y \times y \leq M \ .$$

O conjunto de todos os cabazes de bens (*x*,*y*) que verificam a restrição orçamental, ou seja, que não custam mais do que *M*, é o chamado **conjunto orçamental** ou **conjunto de possibilidades de consumo**, pois tem todos os cabazes de bens que o consumidor consegue consumir com o rendimento que tem.

Da restrição orçamental sai a **reta orçamental**, que dá o conjunto de todos os cabazes de bens (*x*,*y*) que custam exactamente *M*:

$$p_X \times x + p_Y \times y = M \ .$$

Em termos gráficos, tem-se:

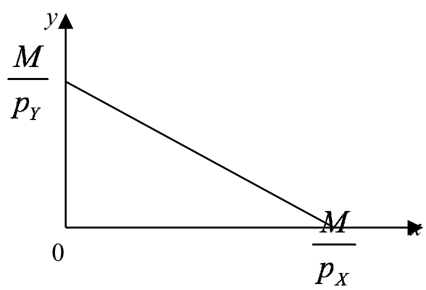

Figura 15

Na Figura 15, o segmento de reta $\left[\frac{M}{p_Y}, \frac{M}{p_X}\right]$ é a chamada reta orçamental e o triângulo $\left[0, \frac{M}{p_Y}, \frac{M}{p_X}\right]$ é o chamado conjunto orçamental ou conjunto de possibilidades de consumo.

Repare-se que a reta orçamental intercepta o eixo das abcissas quando $x = \frac{M}{p_X}$, porque essa interceção se dá quando $y = 0$, donde vem: $p_X \times x + p_Y \times 0 = M \Leftrightarrow x = \frac{M}{p_X}$. Da mesma forma, a recta orçamental intercepta o eixo das ordenadas quando $y = \frac{M}{p_Y}$, porque essa interceção se dá quando $x = 0$, donde vem: $p_X \times 0 + p_Y \times y = M \Leftrightarrow y = \frac{M}{p_Y}$.

A função de utilidade

Admita-se que o consumidor poderá efectuar a sua escolha de entre dois bens, *X* e *Y*, cujas quantidades se designam por *x* e *y*, respectivamente. Ao consumir esses bens, o consumidor fica com uma dada utilidade, a qual se pode representar pela **função de utilidade** $U(x, y)$, que dá a utilidade que o consumidor retira pelo facto de consumir *x* unidades do bem *X* e *y* unidades do bem *Y*. Este é o conceito de **utilidade total**, $UT = U(x, y)$, do qual deriva o conceito de **utilidade marginal**: a utilidade marginal de um dado bem é a variação da utilidade total do consumidor, pelo facto de este consumir mais uma unidade desse bem. Na análise quantitativa contínua o conceito de utilidade marginal é representado pela derivada parcial da função de utilidade em ordem à quantidade do bem em causa[10]. Assim:

$$UM_X = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \text{ e } UM_Y = \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \ ,$$

são as utilidades marginais dos bens *X* e *Y*, respectivamente.

A escolha óptima do consumidor

Sabe-se que, graficamente, a escolha óptima do consumidor se encontra (na generalidade dos casos) no ponto de tangência entre a reta orçamental (*RO*) do consumidor e uma curva de indiferença (*I*) do consumidor, ou seja, no ponto *A* na Figura 16 abaixo:

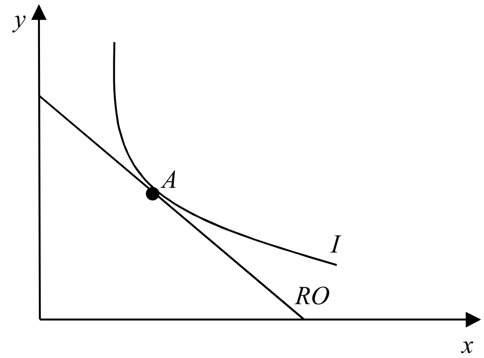

Figura 16

Ora, no ponto *A*, de escolha óptima para o consumidor, o declive (inclinação) da curva de indiferença é igual ao declive da recta orçamental, pois ambas são tangentes nesse ponto.

O declive da recta orçamental pode deduzir-se, a partir da sua expressão:

[10] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, ao dizer-se que se consome mais "uma unidade" do bem, subentende-se que é uma "unidade pequena", uma vez que a utilidade marginal é dada pela derivada parcial, a qual se deduz com base em variações infinitesimais.

$$p_X \times x + p_Y \times y = M \Leftrightarrow y = \frac{M}{p_Y} - \frac{p_X}{p_Y} \times x,$$

donde se pode calcular $\frac{dy}{dx}$, isto é, o declive da recta orçamental,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p_X}{p_Y}.$$

Quanto ao declive da curva de indiferença, terão de se ter em atenção dois aspectos:

– A utilidade do consumidor, $U(x, y)$, pode variar, porque varia a quantidade consumida do bem *X*, ou porque varia a quantidade consumida do bem *Y*, ou porque variam ambas estas quantidades. Então, representando por $dU(x, y)$, a variação da utilidade do consumidor, por *dx*, a variação da quantidade consumida do bem *X*, e por *dy*, a variação da quantidade consumida do bem *Y*, tem-se,

$$dU(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \times dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \times dy.$$

Esta fórmula, conhecida pela **fórmula da variação da utilidade total**, tem uma explicação intuitiva. Se considerarmos, por exemplo, a primeira parcela do segundo membro, $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \times dx$, a derivada parcial dá a variação da utilidade total, pelo facto de o consumidor consumir mais <u>uma unidade</u> do bem *X*[11]. Ora, ao se multiplicar essa derivada parcial pelo número de unidades que variou o consumo do bem *X*, *dx*, ir-se-á ter a variação na utilidade total motivada pelo facto de o consumo do bem *X* ter variado <u>*dx* unidades</u>. De igual forma, considerando a segunda parcela do segundo membro, $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \times dy$, chega-se à conclusão de que ela dá a variação na utilidade total motivada pelo facto de o consumo do bem *Y* ter variado <u>*dy* unidades</u>. Então, todo o segundo membro da fórmula dá a variação na

[11] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, ao dizer-se que se consome mais "uma unidade" do bem *X*, subentende-se que é uma "unidade pequena", uma vez que a derivada parcial deduz-se com base em variações infinitesimais.

utilidade total motivada pelo facto de o consumo do bem *X* ter variado *dx* unidades e o consumo do bem *Y* ter variado *dy* unidades.

– Ao longo de uma curva de indiferença, pela sua própria definição, a utilidade do consumidor é constante, ou seja, a variação da utilidade total é nula, $dU(x,y)=0$.

Tendo em atenção os dois aspectos atrás referidos, ao longo de uma curva de indiferença do consumidor tem-se o seguinte resultado para a variação da utilidade total:

$$dU(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\times dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\times dy=0 \Leftrightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\times dy=-\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\times dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\times dy=-\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\times dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}}.$$

Repare-se que $\frac{dy}{dx}$ mais não é (considerando variações infinitesimais no consumo do bem *X*) do que a derivada de *y* em ordem a *x*, ao longo de uma curva de indiferença, ou seja, o declive da curva de indiferença. Na análise quantitativa contínua, este declive da curva de indiferença tem uma interpretação conhecida: por cada unidade que aumenta o consumo do bem *X*[12], quantas unidades é que tem de diminuir o consumo do bem *Y*, por forma a que a utilidade do consumidor se mantenha constante, ou seja, o declive da curva de indiferença, $\frac{dy}{dx}$, mais não é do que a **taxa marginal de substituição do bem *Y* pelo bem *X***, $TMS_{Y,X}$, ou melhor, o simétrico da taxa marginal de substituição do bem *Y* pelo bem *X*, uma vez que o declive da curva de indiferença é negativo (a curva de indiferença é decrescente) e, por convenção, a taxa marginal de substituição do bem *Y* pelo bem *X* é positiva:

[12] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, ao dizer-se que se consome mais "uma unidade" do bem *X*, subentende-se que é uma "unidade pequena", uma vez que a derivada deduz-se com base em variações infinitesimais.

$$TMS_{Y,X} = -\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow TMS_{Y,X} = -\left(-\frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} \right) \Leftrightarrow TMS_{Y,X} = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow TMS_{Y,X} = \frac{UM_X}{UM_Y} .$$

Então, voltando ao ponto *A*, de escolha óptima para o consumidor, a igualdade entre os declives da recta orçamental e da curva de indiferença pode escrever-se como:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{ao longo da recta orçamental}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{ao longo da curva de indiferença}} \Leftrightarrow -\frac{p_X}{p_Y} = -\frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_X}{p_Y} = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} \Leftrightarrow \frac{p_X}{p_Y} = \frac{UM_X}{UM_Y} \Leftrightarrow \frac{UM_X}{p_X} = \frac{UM_Y}{p_Y} ,$$

donde se prova que o consumidor está no ponto de escolha óptima quando o rácio do preço dos bens é igual ao rácio das utilidades marginais desses bens (penúltima passagem), ou então, o que é o mesmo, quando a utilidade marginal por cada unidade monetária gasta é igual para ambos os bens (última passagem).

5 – COMPORTAMENTO DO PRODUTOR

A curva da oferta

Num determinado mercado, a **quantidade oferecida** de um bem, *q*, depende de um conjunto de variáveis: o preço do próprio bem, os preços de alguns outros bens, as expectativas do produtor em relação ao futuro, alterações nas tecnologias de produção do bem, etc. Se designarmos essas variáveis por x_i, i = 1, 2, …, n, a **função de oferta do bem**, g, pode representar-se como sendo:

$$q = g_S(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Usualmente, a variável que mais explica a oferta de um bem é o próprio preço do bem, pelo que faz sentido, na função de oferta do bem, isolar a variável preço, admitindo que todas as outras variáveis permanecem constantes. Supondo que a variável preço é x_1, ou seja, $x_1 = p$, e que $x_i = \bar{x}_i$, i = 2, 3, …, n, significa que a variável x_i permanece constante no valor $\bar{x}_i$, então tem-se:

$$q = f_S(p, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = f_S(p),$$

onde f_S é a **curva de oferta do bem** e, na última passagem, se omitiram as variáveis $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_n$, porque se trata de constantes. Repare-se que a curva da oferta do bem é uma relação apenas entre duas variáveis: a quantidade oferecida do bem, q, e o preço do próprio bem, p (uma vez que se admite que todas as restantes variáveis que influenciam a oferta do bem permanecem constantes).

Na análise quantitativa contínua a expressão analítica f_S é conhecida e o seu gráfico pode representar-se como:

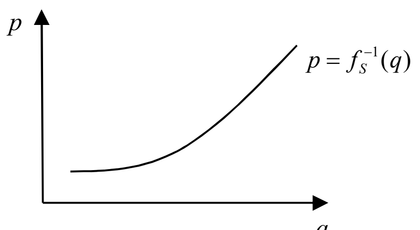

Figura 17

Na análise quantitativa discreta só se conhecem alguns pontos da curva da oferta, fazendo-se a sua representação gráfica pela união desses pontos:

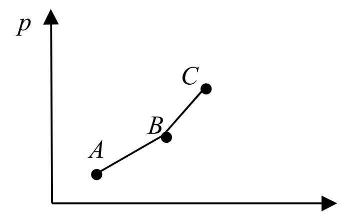

Figura 18

Repare-se que, por convenção na representação gráfica, a variável preço se representa no eixo das ordenadas e a variável quantidade se representa no eixo das abcissas[13], pelo que, em rigor, o que se representa graficamente, não é a curva da oferta, $q = f_S(p)$, isto é, q como função de p, mas sim a curva da oferta inversa, $p = f_S^{-1}(q)$, ou seja, p como função de q.

Da expressão da curva da oferta de um bem, $q = f_S(p, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = f_S(p)$, vê-se claramente que uma variação de p implica uma variação de q, ao longo da curva da oferta f_S. Na Figura 19 abaixo, isso está representado pelo aumento do preço, de p_1 para p_2, o que leva a quantidade oferecida a aumentar, de q_1 para q_2, ou seja, a passar do ponto A para o ponto B da mesma curva da oferta, a qual permanece inalterável:

[13] Veja-se a nota de pé de página nº 8.

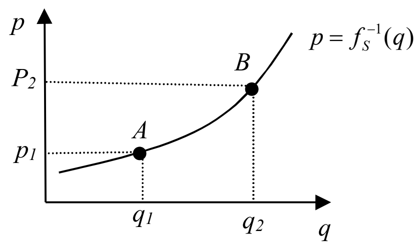

Figura 19

Já uma alteração no valor de uma das restantes variáveis explicativas da quantidade oferecida do bem, $x_2 = \bar{x}_2,...,x_n = \bar{x}_n$, também conduz a uma variação de *q*, mas através da alteração da própria curva da oferta. Se, por exemplo, x_2 passar de $\bar{x}_2$ para $\bar{x}_2^{'}$, então a curva da oferta, f_S, desloca-se, pois alterou-se um dos seus parâmetros. Na Figura 20 abaixo, tem-se a representação dessa deslocação da curva da oferta:

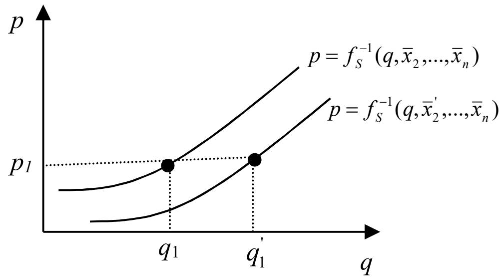

Figura 20

Repare-se que, para o mesmo nível de preços, $p = p_1$, têm-se dois níveis de oferta, q_1 e $q_1^{'}$, consoante a variável explicativa x_2 assuma o valor $\bar{x}_2$ ou $\bar{x}_2^{'}$, respetivamente.

Como se sabe, existe uma relação directa entre a quantidade oferecida do bem e o preço do bem (se aumenta o preço, aumenta a quantidade oferecida), o que, geometricamente, dá origem a uma curva da oferta crescente. Quer isto dizer que a derivada de *q* em ordem a *p*, que dá o declive ou inclinação da curva da oferta num dado ponto, é positiva:

$$\frac{dq}{dp} = f_S'(p) > 0\,.$$

A forma funcional f_S, que representa a curva da oferta de um bem, pode assumir diversos tipos, mas, em muitos casos, é habitual assumir que se trata de uma **forma funcional linear**. Assim sendo, a curva da procura do bem fica:

$$q = f_S(p) \Leftrightarrow q = a + b \times p, a \geq 0, b > 0\,,$$

onde o sinal positivo antes da constante positiva *b* se justifica pela relação direta entre a quantidade oferecida e o preço do próprio bem. Repare-se que esta expressão linear da curva da oferta mais não é do que a **equação de uma reta** crescente:

$$\frac{dq}{dp} = b > 0\,.$$

As elasticidades da oferta

As **elasticidades da oferta** medem a razão entre a variação percentual de uma dada variável explicativa da oferta de um bem e a variação percentual da quantidade oferecida desse bem. Assim, partindo da função de oferta do bem,

$$q = g_S(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)\,,$$

a elasticidade da quantidade oferecida do bem, *q*, em relação à variável x_j, é dada por:

$$\varepsilon_{q,x_j} = \frac{\text{variação percentual da quantidade oferecida}}{\text{variação percentual da variável } x_j} = \frac{\frac{\Delta q}{q} \times 100}{\frac{\Delta x_j}{x_j} \times 100} = \frac{\Delta q}{\Delta x_j} \times \frac{x_j}{q}\,,$$

onde os "Δ" representam as variações das respectivas variáveis.

Na análise quantitativa discreta levanta-se uma questão quanto a estas variações percentuais: como, ao variar, a variável x_j "salta" entre os pontos *A* e *B*, o valor da elasticidade depende de se considerar qual é ponto de partida, se o *A*, se o *B*, o que leva à conhecida fórmula do ponto médio. Na análise quantitativa contínua esse problema desaparece, porque se admite que a variação da variável x_j é uma variação muito pequena, ou seja, infinitesimal, o que leva a ficar numa vizinhança do ponto de partida. Assim, a elasticidade da quantidade oferecida do bem, *q*, em relação à variável x_j, na análise quantitativa contínua (designada por "elasticidade no ponto"), é dada por:

$$\varepsilon_{q,x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_j} \times \frac{x_j}{q} = \frac{\partial q}{\partial x_j} \times \frac{x_j}{q}.$$

Repare-se que o $\lim\limits_{\Delta x_j \to 0}$ representa a variação infinitesimal da variável x_j e que $\lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x_j}$ mais não é do que a definição da derivada parcial de *q* em ordem a x_j (recorde-se que a derivada parcial de *q* em ordem a x_j dá a variação de *q* motivada por uma variação infinitesimal de x_j, pressupondo que todas as restantes variáveis explicativas de *q* permanecem constantes).

A interpretação desta elasticidade é a habitual: por cada 1% que varia a variável x_j (desde o seu ponto de partida), quantos por cento é que varia a variável *q* (quantidade oferecida do bem)[14]. É claro que, se a variável x_j for o preço do próprio bem, tem-se a elasticidade da oferta em relação ao preço ou elasticidade da oferta preço.

[14] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, subentende-se que a variação de 1% da variável x_j é uma "variação pequena", uma vez que esta elasticidade no ponto se baseia no conceito de derivada, deduzido com base em variações infinitesimais.

A função de produção

Admita-se que o produtor poderá efectuar a produção do seu *output*, cuja quantidade se designa por *q*, a partir de dois *inputs*, trabalho (*L*) e capital (*K*), cujas quantidades se designam por *l* e *k*, respectivamente. Então a **função de produção** será $q = f(l,k)$, a qual dá a quantidade máxima de *output* que o produtor consegue produzir, a partir das quantidades *l* do *input* trabalho e *k* do *input* capital. Este é o conceito de **produto total**, $PT = q = f(l,k)$, do qual deriva o conceito de **produto (ou produtividade) marginal**: o produto marginal de um dado *input* é a variação do produto total, pelo facto de se utilizar mais uma unidade desse *input*. Na análise quantitativa contínua o conceito de produto marginal é representado pela derivada parcial da função de produção em ordem à quantidade do *input* em causa[15]. Assim:

$$PM_L = \frac{\partial f(l,k)}{\partial l} \text{ e } PM_K = \frac{\partial f(l,k)}{\partial k} \quad ,$$

são os produtos marginais dos *inputs* *L* e *K*, respectivamente.

A função de custo

Para produzir uma dada quantidade de *output*, *q*, o produtor tem de adquirir dadas quantidades dos *inputs* trabalho e capital, pelo que tem um determinado custo para efetuar essa produção. Esse custo pode ser representado pela **função de custo** *C(q)*. Este é o conceito de **custo total**, *CT = C(q)*, do qual deriva o conceito de **custo marginal**: o custo marginal é a variação do custo total, pelo facto de se produzir mais uma unidade de

[15] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, ao dizer-se que se utiliza mais "uma unidade" do *input*, subentende-se que é uma "unidade pequena", uma vez que o produto marginal é dado pela derivada parcial, a qual se deduz com base em variações infinitesimais.

output. Na análise quantitativa contínua o conceito de custo marginal é representado pela derivada da função de custo em ordem à quantidade de *output*[16]. Assim:

$$CM = \frac{dC(q)}{dq} \; ,$$

é o custo marginal.

A maximização do lucro em concorrência perfeita

O lucro do consumidor, π, é dado por:

$$\pi = RT - CT \, ,$$

onde $RT = p \times q$ são as receitas totais do produtor. Então, fica:

$$\pi = RT - CT \Leftrightarrow \pi = p \times q - C(q) \, .$$

Como se sabe, a maximização de uma função pode obter-se igualando a sua derivada a zero (pressupondo que são verificadas determinadas condições matemáticas de segunda ordem, o que se admite na generalidade dos manuais de microeconomia, para simplificar a análise). Então, tem-se:

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Leftrightarrow \frac{d[p \times q - C(q)]}{dq} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(p \times q)}{dq} - \frac{dC(q)}{dq} = 0 \Leftrightarrow p - CM = 0 \, .$$

Repare-se que $\frac{d(p \times q)}{dq} = p$, porque o preço é constante em concorrência perfeita (os produtores são "tomadores de preço"). Note-se, ainda, que $\frac{d(p \times q)}{dq} = \frac{dRT}{dq} = p$, mais não é do que a **receita marginal**, *RM*, do produtor, ou seja, a variação da receita total,

[16] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, ao dizer-se que se produz mais "uma unidade" de *output*, subentende-se que é uma "unidade pequena", uma vez que o custo marginal é dado pela derivada, a qual se deduz com base em variações infinitesimais.

pelo facto de se produzir (e vender) mais uma unidade de output[17]. Então, continuando a dedução acima, fica:

$$p - CM = 0 \Leftrightarrow p = CM ,$$

que é o ponto óptimo de produção para o produtor, no sentido em que é neste ponto que ele maximiza o seu lucro.

[17] Tendo em atenção o que se referiu na nota de pé-de-página nº 4, ao dizer-se que se produz (e vende) mais "uma unidade" de *output*, subentende-se que é uma "unidade pequena", uma vez que a receita marginal é dada pela derivada, a qual se deduz com base em variações infinitesimais.

6 – EQUILÍBRIO DE MERCADO EM CONCORRÊNCIA PERFEITA

O equilíbrio de mercado

O **equilíbrio de mercado** em concorrência perfeita dá-se pela igualdade entre a procura e a oferta, como se pode ver pela Figura 21 abaixo, onde q_e é a quantidade de equilíbrio e p_e o preço de equilíbrio:

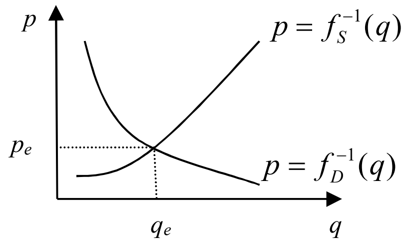

Figura 21

Esta intercepção geométrica entre as curvas da procura e da oferta tem o seu equivalente analítico na resolução da seguinte equação:

$$f_D^{-1}(q) = f_S^{-1}(q).$$

Resolvendo esta equação obtém-se o valor de q_e e, depois, substituindo esse valor de q_e em $p = f_D^{-1}(q)$ ou em $p = f_S^{-1}(q)$, obtém-se o valor de p_e.